فصل دوم

حد و پیوستگی

یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی در حساب دیفرانسیل و انتگرال ، مفهوم حد است ، به طوری که درک عمیق بسیاری از مطالب حساب دیفرانسیل و انتگرال بدون اشراف به مفهوم حد غیر ممکن به نظر می رسد. بنابراین، هدف ما در این فصل ، تعریف دقیق حد ، ذکر مثال های گوناگون ، اثبات اکثر قضایا و تعمیم و گسترش مفاهیم مربوط به حد خواهد بود . بیان مطالب در این فصل بایستی از چنان استحکامی بر خوردار باشد که بتوان با اطمینان در فصل های بعدی به مشتق و کاربردهای آن ، انتگرال معین و کاربرهای آن و... پرداخت و از آموخته های این فصل بـه عنـوان ابـزاری قابـل اعتماد استفاده کرد .

۲ . ۱ مفهوم حد

تعریف: فرض کنیم تابع f در **یک همسایگی محذوف نقطه** a مانند I (یعنی در تمام نقاط فاصله باز I به استثنای نقطه a) تعریف شده باشد.

گوییم وقتی x به سمت نقطه a میل می کند ، تابع f دارای حدی برابر با L است و می نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ در صورتی که شرط زیر برقرار باشد:

به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد ، به طوری که اگر $0 < |x-a| < \delta$ ، آنگاه $|f(x) - L| < \varepsilon$.

یا به زبان منطق

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

به بیان شهودی وقتی می نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$، معنی آن این است که تابع f به قدر دلخواه به عدد L نزدیک می شود ، به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک گردد . مثال های زیر در روشن شدن مفهوم حد به ما یاری می رسانند.

مثال۱ : با استفاده از تعریف حد نشان دهید که $\lim_{x\to 2}(3x+4)=10$.

حل: بایستی نشان دهیم که

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x+4)-10| < \varepsilon$$

پس فرض کنیم عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ را انتخاب کرده باشیم ، داریم

$$|(3x+4)-10| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x-6| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

اکنون اگر $0<\delta \le \frac{\varepsilon}{3}$ اختیار شود ، آنگاه

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x-2| < \varepsilon \Rightarrow |3x-6| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$|(3x+4)-10| < \varepsilon$$

بنابراین ، نتیجه می گیریم که $\lim_{x\to 2}(3x+4)=10$.

مثال۲ : با استفاده از تعریف حد نشان دهید که $\lim_{x\to 5}x^2=25$.

حل: بایستی نشان دهیم که

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-5| < \delta \Rightarrow |x^2-25| < \varepsilon$$

داریم

$$|x^2-25| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x-5)(x+5)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-5||x+5| < \varepsilon$$

اکنون کران بالایی برای $|x+5|$ پیدا می کنیم و برای این منظور فرض می کنیم $\delta \le 1$.
پس می نویسیم

$$|x-5| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-5 < 1 \Leftrightarrow 4 < x < 6 \Leftrightarrow 9 < x+5 < 11$$

و بنابراین $|x-5||x+5| < 11\times|x-5|$. لذا، اگر $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{11}\right\}$ اختیار کنیم ،آنگاه برای $|x-5|<\delta$ به دست می آوریم $11\times|x-5| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-5| < \frac{\varepsilon}{11}$ و $|x-5||x+5| < 11|x-5|$.
بنابراین $|x-5||x+5| < \varepsilon$ ، یعنی $|x^2-25| < \varepsilon$.

تبصره: در دو مثال بالا پس از بدست آوردن δ از روی ε نشان دادیم که $|x-a|<\delta$ نتیجه می دهد که $|f(x)-L|<\varepsilon$ ، اما در حل مسایل حد معمولا پس از بدست آوردن δ از روی ε مساله را تمام شده فرض می کنند و ما هم در مثالهای بعدی به همین طریق عمل خواهیم کرد .

مثال۳ : با استفاده از تعریف حد نشان دهید که $\lim_{x\to 7}\frac{8}{x-3}=2$.

حل: بایستی نشان دهیم که

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0 \ni 0<|x-7|<\delta\Rightarrow\left|\frac{8}{x-3}-2\right|<\varepsilon$$

می توان نوشت

$$\left|\frac{8}{x-3}-2\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{8-2x+6}{x-3}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{14-2x}{x-3}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{2|x-7|}{|x-3|}<\varepsilon$$

حال برای $\frac{1}{|x-3|}$ کران بالایی پیدا می کنیم . فرض کنیم از ابتدا در جستجوی $\delta>0$ ی هستیم به طوری که $\delta\leq 1$. پس می نویسیم

$$|x-7|<1\Leftrightarrow -1<x-7<1\Leftrightarrow 3<x-3<5\Leftrightarrow\frac{1}{5}<\frac{1}{x-3}<\frac{1}{3}$$

بنابراین داریم $\frac{2|x-7|}{|x-3|}<2|x-7|\times\frac{1}{3}$.

اگر قرار دهیم $2|x-7|\times\frac{1}{3}<\varepsilon$ به دست می آوریم $|x-7|<\frac{3\varepsilon}{2}$ و در نتیجه کافی است $\delta=\min\left\{1,\frac{3\varepsilon}{2}\right\}$ اختیار گردد.

مثال۴: با استفاده از تعریف حد نشان دهید که $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{3}{5}$ و مقدار δ متناظر به $\varepsilon=\frac{1}{1000}$ را پیدا کنید.

حل: بایستی نشان دهیم که

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0 \ni 0<|x-2|<\delta\Rightarrow\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon$$

می توانیم بنویسیم

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{5x^2-5-3x^2-3}{5(x^2+1)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{2x^2-8}{5(x^2+1)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{2|x^2-4|}{5(x^2+1)}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{2|x-2||x+2|}{5(x^2+1)}<\varepsilon$$

حال کران بالایی برای $\frac{|x+2|}{x^2+1}$ پیدا می کنیم. فرض کنیم $\delta\leq 1$، و بنابراین

$$|x-2|<1\Leftrightarrow -1<x-2<1\Leftrightarrow 1<x<3\Leftrightarrow$$

$$1<x^2<9 \Leftrightarrow 2<x^2+1<10 \Leftrightarrow \frac{1}{10}<\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{2}$$

همچنین

$$1<x<3 \Leftrightarrow 3<x+2<5$$

و بنابراین از نامساوی های بالا داریم $\frac{3}{10}<\frac{x+2}{x^2+1}<\frac{5}{2}$. پس می توانیم بنویسیم

$$\frac{2|x-2||x+2|}{5(x^2+1)}<\frac{2}{5}|x-2|\times\frac{5}{2}=|x-2|$$

حال قرار می دهیم $|x-2|<\varepsilon$ و در نتیجه اگر $\delta=\min\{1,\varepsilon\}$ اختیار شود ، ما از $|x-2|<\delta$ بدست می آوریم $\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon$. بالاخره برای $\varepsilon=\frac{1}{1000}$، کافی است $0<\delta\le\frac{1}{1000}$ اختیار شود.

تبصره: گاهی اوقات به ما می گویند که ثابت کنید حد تابع مفروضی در نقطه داده شده ای موجود نیست و این شاید به نوعی مشکل تر از اثبات وجود حد باشد . به دو مثال زیر توجه کنید.

مثال۵: ثابت کنید که $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ موجود نیست.

حل: اثبات به برهان خلف است ،یعنی فرض کنیم $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ موجود باشد.

چون همواره $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$، این حد عددی حقیقی است، به عنوان مثال، $L\in R, \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=L$.

وجود حد می گوید که $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0 \ni 0<|x|<\delta \Rightarrow \left|\sin\frac{1}{x}-L\right|<\varepsilon$.

فرض کنیم $\varepsilon=\frac{1}{2}$، و فرض کنیم عدد طبیعی n به قدر کافی بزرگ اختیار شود،به طوری که $x_1=\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$, $x_2=\frac{1}{(2n-\frac{1}{2})\pi}$ هر دو از δ کمتر باشند، پس داریم

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-L\right|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\sin(2n+\frac{1}{2})\pi-L\right|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow |1-L|<\frac{1}{2}$$

و

$$\left|\sin\frac{1}{x_2}-L\right|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\sin(2n-\frac{1}{2})\pi-L\right|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow |-1-L|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$|1+L|<\frac{1}{2}$$

اکنون می توانیم بنویسیم

$$2 = |(1-L)+(1+L)| \le |1-L| + |1+L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

یعنی $1 < 2$. پس فرض وجود حد منجر به نتیجه گیری این نامساوی غلط شد . بنابراین، فرض خلف باطل است،یعنی $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ موجود نیست.

مثال۶: ثابت کنید تابع $D(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \text{ منطق} \\ 0 \ , & x \text{ اصم} \end{cases}$،که به تابع **دیریکله** موسوم است،در هیچ نقطه ای دارای حد نیست. از این مطلب استفاده کنید که اگر β, α دو عدد حقیقی باشند و $\alpha < \beta$، آنگاه بین β, α به تعداد نامتناهی اعداد اصم و اعداد منطق وجود دارد.

حل: اثبات به برهان خلف است، یعنی فرض کنیم که در نقطه ای مانند $x_0 \in R$، تابع $D(x)$ دارای حد باشد، مثلا $\lim\limits_{x\to x_0} D(x) = c$،که در آن c عددی حقیقی است. پس بنابر تعریف حد

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |D(x) - c| < \varepsilon$$

اکنون $\varepsilon = \frac{1}{2}$ اختیار کرده و فرض می کنیم x_1 عددی منطق و x_2 عددی اصم باشد کـه بـرای آنهـا شرط $|x_1 - x_0| < \delta$,$|x_2 - x_0| < \delta$ برقرار است.

پس داریم

$$|x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow |D(x_1) - c| < \frac{1}{2} \Rightarrow |1 - c| < \frac{1}{2}$$

و

$$|x_2 - x_0| < \delta \Rightarrow |D(x_2) - c| < \frac{1}{2} \Rightarrow |0 - c| < \frac{1}{2} \Rightarrow |c| < \frac{1}{2}$$

اکنون می توانیم بنویسیم

$$1 = |(1-c) + c| \le |1-c| + |c| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

یعنی $1 < 1$.با این نتیجه گیری غلط معلوم می شود که فرض خلف باطل اسـت، یعنـی $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ موجود نیست.

بررسی هندسی تعریف حد

فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$، پس مطابق تعریف حد داریم

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

اما

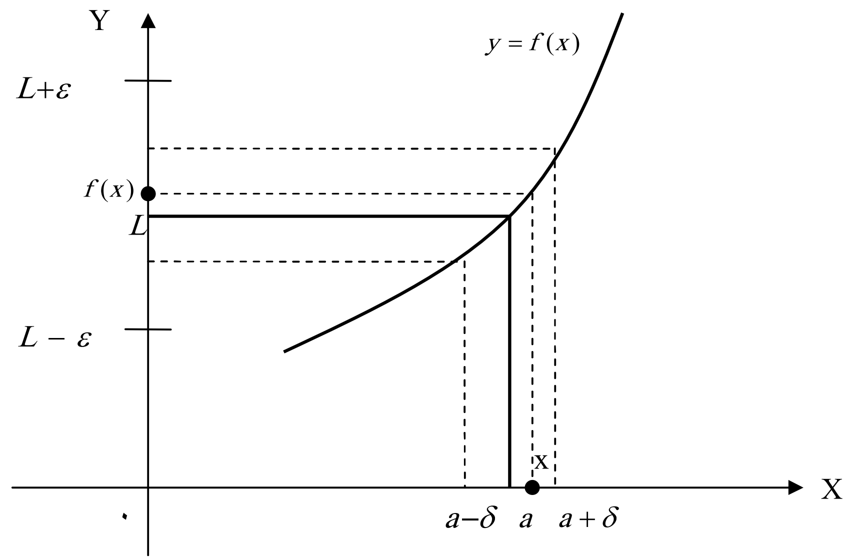
$$|x-a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \Leftrightarrow x \varepsilon (a-\delta, a+\delta)$$

و بنابراین

$$0 < |x-a| < \delta \Leftrightarrow x \varepsilon (a-\delta, a+\delta), x \ne a$$

همین طور $\left| f(x)-L \right| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x)\varepsilon(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

در نتیجه می توان گفت که برای هر εهمسایگی L یک δهمسایگی محذوف برای a وجود دارد، به طوری که اگر x در δهمسایگی محذوف a باشد، آنگاه تصویرآن $f(x)$ در εهمسایگی L قرارگیرد. لطفا به شکل زیر توجه فرمایید.



شکل ۲ .۱

۲ . ۲ حدهای چپ و راست

در بررسی $\lim\limits_{x\to a} f(x)$با مقادیری از x در یک همسایگی محذوف a سروکار داریم، یعنی مقادیری از x نزدیک به a که یا کوچکتر از a و یا بزرگتر از a هستند.اکنون تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-4}$ را درنظر می گیریم. از آنجایی که $f(x)$ برای $x<4$ وجود ندارد ،تابع f در یک همسایگی محذوف 4 تعریف نشده است و بنابراین، بررسی $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x-4}$ معنی ندارد. با وجود این، اگر x محدود به مقادیر بزرگتر از 4 باشد ، مقدار $\sqrt{x-4}$را می توان به قدر دلخواه نزدیک به ۰ گرفت ،به شرط آنکه x به قدر کافی نزدیک به 4 ولی بزرگتر از آن باشد. در چنین وضعیتی فرض می کنیم که x به عدد 4 از سمت راست میل می کند و حد یک طرفه از راست را بررسی می کنیم. به طور کلی

تعریف: فرض کنیم تابع f در یک فاصله باز مانند (a,c) تعریف شده باشد. گوییم وقتی x از راست به a میل می کند ،تابع f دارای **حد راست** L است و می نویسیم $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$،در صورتی که برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

و یا به زبان منطق

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < x - a < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

اگر در بررسی حد یک تابع متغیر مستقل x محدود به مقادیر کوچکتر از a باشد ، می گوییم x از سمت چپ به a میل می کند و حد یک طرفه از سمت چپ را داریم. به طور کلی

تعریف: فرض کنیم تابع f در یک فاصله باز مانند (d,a), تعریف شده باشد. گوییم وقتی x از چپ به a میل می کند ،تابع f دارای **حد چپ** L است و می نویسیم $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$،در صورتی که برای هر $\varepsilon > 0$عددی مانند $\delta > 0$وجود داشته باشد به طوری که

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

و یا به زبان منطق

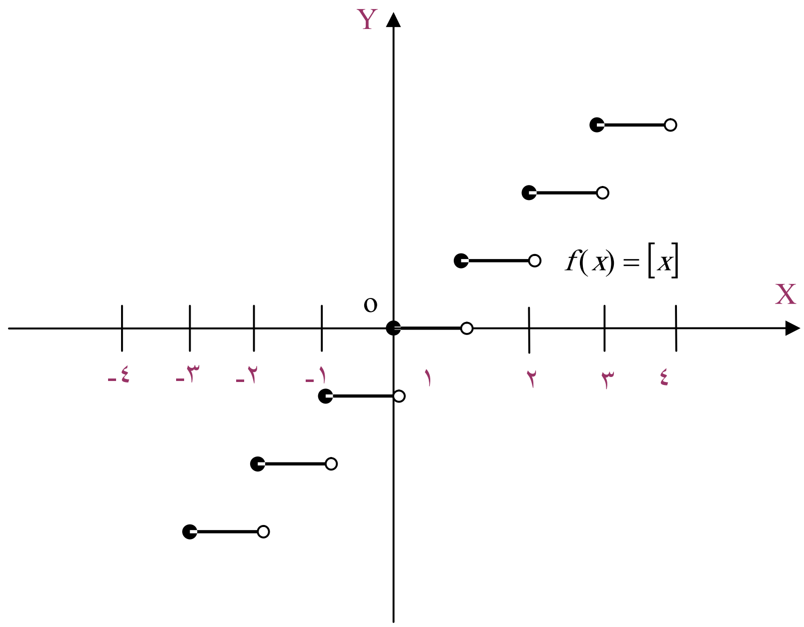
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni -\delta < x - a < 0 \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

تذکر: تعریف حد چپ را بدین صورت هم می توان نوشت

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < a - x < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

مثال۷: تابع جزء صحیح $f(x) = [x]$ را در نظر می گیریم. نشان دهید که تابع $f(x)$ در همه جا به غیراز نقاط صحیح $x = n (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ دارای حد است. همچنین نشان دهید که در هر نقطه صحیح $x = n$ تابع $f(x)$ دارای حد راست $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n$ و حدچپ $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n - 1$ است.

حل: ابتدا گراف تابع را رسم می کنیم



شکل ۲ . ۲

در مرحله بعد نشان می دهیم که (۱) $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=n$ و (۲) $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)=n-1$

برای اثبات (۱) نشان می دهیم که

$$\forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \ni 0<x-n<\delta \Rightarrow |f(x)-n|<\varepsilon$$

اگر از ابتدا فرض کنیم که $\delta<1$،آنگاه شرط $0<x-n<\delta$ نتیجه می دهد که $f(x)=[x]=n$ و بنابراین $|f(x)-n|=|n-n|=0<\varepsilon$.

برای اثبات(۲) نشان می دهیم که

$$\forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \ni 0<x-n<\delta \Rightarrow |f(x)-(n-1)|<\varepsilon$$

مجددا $\delta<1$فرض می کنیم و $0<n-x<\delta$نتیجه می دهد که $f(x)=[x]=n-1$

و بنابراین

$$|f(x)-(n-1)|=|(n-1)-(n-1)|=0<\varepsilon$$

بالاخره نشان می دهیم که اگر x_0 عدد صحیحی نباشد ،آنگاه

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=[x_0]$$

توجه کنید که چون x_0 عدد صحیحی نیست، پس می توان عدد صحیحی مانند n یافت به طوری که $n<x_0<n+1$.

حال $\delta=\min\{x_0-n, n+1-x_0\}$گرفته و x را چنان اختیار می کنیم که داشته باشیم $0<|x-x_0|<\delta$ و برای نامساوی بالا داریم

$$|f(x)-[x_0]|=|[x]-[x_0]|=|[x_0]-[x_0]|=0<\varepsilon$$

و این برای هر $\varepsilon>0$دلخواه برقرار است، خلاصه نشان دادیم که

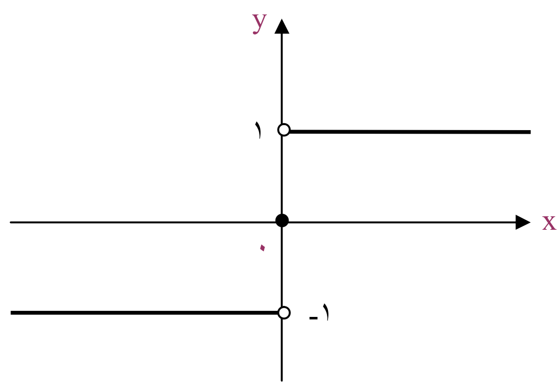
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |[x] - [x_0]| < \varepsilon.$$

مثال۸: فرض کنیم تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

تعریف شده باشد . وضعیت حدی تابع را در نقطه 0 بررسی کنید.

حل: ابتدا گراف تابع را رسم می کنیم



شکل ۲ . ۳

حال $x \to 0^-$ بدین معنی است که $x < 0$ و به 0 نزدیک می شود و بنابراین $f(x) = -1$.
پس $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$ و به طریق مشابه دیده می شود که: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

قضیه۱: تابع f در نقطه a دارای حد است،اگر و فقط اگر تابع f در نقطه a دارای حد راست و حد چپ بوده و این دو حد با هم مساوی باشند.
به عبارت دیگر ، $\lim_{x \to a} f(x) = L$ اگر و فقط اگر $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

اثبات: ابتدا فرض می کنیم که $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ، پس

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

اما نامساوی $0 < |x - a| < \delta$ معادل نامساوی $-\delta < x - a < 0$ برای x های کوچکتر از a و معادل نامساوی $0 < x - a < \delta$ برای x های بزرگتر از a است. بنابراین می توانیم بنویسیم

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

و

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni -\delta < x-a < 0 \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

پس مطابق تعریف حدود چپ و راست $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L, \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$

سپس فرض کنیم: $(1) \quad \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ و $(2) \quad \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$

از (1) نتیجه می شود که

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \ni 0 < x-a < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

از (2) نتیجه می شود که

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \ni -\delta_2 < x-a < 0 \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

اگر $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ بگیریم ، آنگاه

$$0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

و

$$-\delta < x-a < 0 \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

و بنابراین

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

در نتیجه

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و اثبات تمام است.

۲ . ۳ چند مثال دیگر

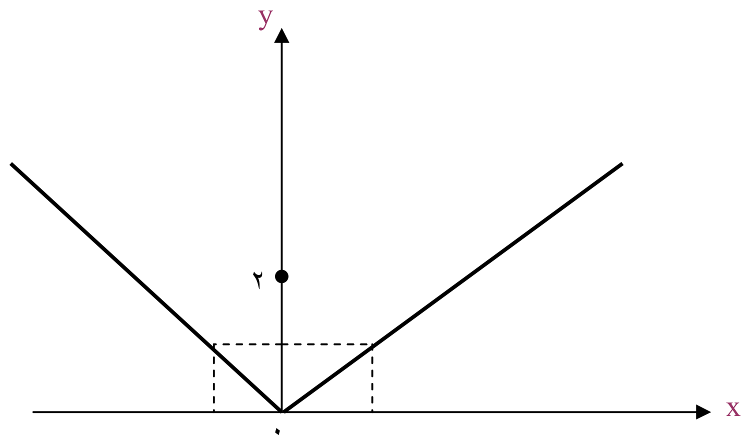
قضیه فوق گاهی می تواند در اثبات عدم وجود حد یک تابع در نقطه مفروض مورد استفاده قرارگیرد . بدین معنی که اگر نشان دهیم در نقطه مفروض برای تابع لااقل یکی از حدود چپ و راست موجود نیست و حتی در صورت وجود حد راست مساوی حد چپ نیست ، آنگاه به استناد قضیه بالا حکم می کنیم که تابع در نقطه مفروض حد ندارد. مورد استفاده دیگر از قضیه بالا وقتی است که تابع با بیش از یک ضابطه تعریف گردد و بخواهیم حد تابع را در نقطه ای که ضابطه تابع عوض می شود ، بررسی نماییم.

مثال۹: فرض کنیم تابع g با ضابطه $g(x) = \begin{cases} |x| & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \end{cases}$ تعریف شده باشد.

گراف تابع را رسم کرده و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ را بررسی کنید.

حل: گراف تابع در زیر رسم شده است.

داریم $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$. پس بنابر قضیه بالا $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ موجود و مساوی با 0 است . توجه کنید که مطابق تعریف تابع $g(0) = 2$ ، هیچ تاثیری بر $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ندارد .



شکل ۲ . ۴

مثال۱۰: فرض کنیم تابع h با ضابطه زیر تعریف شده باشد:

$$h(x)=\begin{cases}4-x^2 & , \quad x\le 1\\ 1+x^2 & , \quad x>1\end{cases}$$

گراف تابع را رسم کرده و هر یک از حدود زیر را در صورت وجود پیدا کنید:

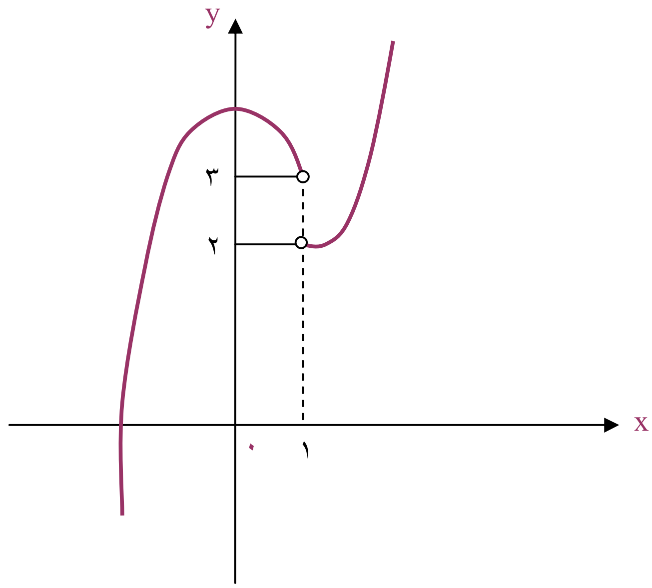
$$\lim_{x\to 1} h(x),\quad \lim_{x\to 1^-} h(x),\quad \lim_{x\to 1^+} h(x)$$

حل: گراف تابع در زیر رسم شده است.

داریم $\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-}(4-x^2)=3$ و $\lim_{x\to 1^+} h(x)=\lim_{x\to 1^+}(1+x^2)=2$

از آنجایی که $\lim_{x\to 1^-} h(x)\ne\lim_{x\to 1^+} h(x)$ بنابر قضیه ۱ در بالا $\lim_{x\to 1} h(x)$ موجود نیست.

توجه کنید که $h(1)=3$.



شکل ۲ . ۵

مثال۱۱: حدود یک طرفه توابع زیر را پیدا کنید:

(۱) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ در $x=1$ ، (۲) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ در $x=0$.

حل: (۱) می دانیم برای $x\geq 1$، $|x-1|=x-1$ و برای $x<1$، $|x-1|=-(x-1)$

بنابراین

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}(-x-1)=-2$$

پس $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ موجود نیست.

(۲) داریم

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{x}$$

اما

$$|\sin x|=\begin{cases}\sin x & , \quad 0\leq x<\dfrac{\pi}{2}\\ -\sin x & , \quad \dfrac{-\pi}{2}<x<0\end{cases}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-\sqrt{2}\frac{\sin x}{x}) = -\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\sqrt{2}\frac{\sin x}{x}) = \sqrt{2}$$

توجه کنید که در اینجا از این مطلب استفاده کرده ایم کـه $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. اثبـات ایـن حـد را در همین فصل و بعد از قضیه فشردگی خواهید دید.

۲. ۴ قضایای حد

در قسمت قبلی این فصل با تعریف حد و مثال های گوناگونی درباره آن آشنا شدیم . اثبـات وجـود حد با استفاده از تعریف به طور ضمنی این مطلب را نیز روشن می سازد که این کار شاید برای همه توابع عملی و از نظر زمانی مقرون به صرفه نباشد . به این دلیل است که اکنـون بـه بیـان و اثبـات قضایای حد می پردازیم و از حالا به بعد در حل مسایل مربوط به حد همواره این قضایا را به کار می بریم و فقط وقتی از تعریف حد استفاده می کنیم که به صراحت از ما خواسته شده باشد .

قضیه۲ : اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ آنگاه برای عدد حقیقی ثابت c داریم $\lim_{x\to a} cf(x) = cL$.

اثبات: اگر $c = 0$ که حکم بدیهی است ، پس فرض کنیم که $c \neq 0$. بایستی ثابت کنیم که

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |cf(x) - cL| < \varepsilon$$

اما چون $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ، پس به ازای $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|c|}$ عددی مانند $\delta_1 > 0$ وجود دارد ، به طوری که اگر $0 < |x-a| < \delta_1$ ، آنگاه $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. با ضرب طـرفین ایـن نامسـاوی در $|c|$ بـه دسـت مـی آوریم $|cf(x) - cL| < \varepsilon$. پس نشان داده ایم که به ازای هـر $\varepsilon > 0$ ، عـددی مانـند $\delta_1 > 0$ وجـود دارد ، به طوری که اگر $0 < |x-a| < \delta_1$ ، آنگاه $|cf(x) - cL| < \varepsilon$ و اثبات تمام است.

قضیه۳: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L_1, \lim_{x\to a} g(x) = L_2$ ، آنگاه

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$$

اثبات: قضیه را برای حد حاصلجمع دو تابع ثابت می کنیم ، یعنی ثابت می کنیم $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$. بایستی نشان دهیم که

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$$

چون $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ پس

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}>0\exists\delta_1>0\ni 0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-L_1|<\varepsilon_1$$

و چون $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ پس

$$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}>0\exists\delta_2>0\ni 0<|x-a|<\delta_2\Rightarrow|g(x)-L_2|<\varepsilon_2$$

حال $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ گرفته و فرض می کنیم که $0<|x-a|<\delta$ ، بنابراین

$$|(f(x)+g(x))-(L_1+L_2)|=|(f(x)-L_1)+(g(x)-L_2)|$$
$$\le|f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|<\varepsilon_1+\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

خلاصه برای $\varepsilon>0$ دلخواه ، عددی مانند $\delta>0$ پیدا شد ، به طوری که $0<|x-a|<\delta$ نتیجه می دهد $|(f(x)+g(x))-(L_1+L_2)|<\varepsilon$ و بدین ترتیب اثبات تمام است .

تبصره :فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجود نباشد . در این صورت توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)-g(x)$ در $x=a$ دارای حد نیستند . به عنوان مثال فرض کنیم که $h(x)=f(x)+g(x)$ ، ولی $\lim_{x\to a} h(x)$ موجود باشد و مثلا $\lim_{x\to a} h(x)=H$.

اکنون $g(x)=h(x)-f(x)$ و با توجه به قضیه۳ ، $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}(h(x)-f(x))=H-L$ و این با فرض حد نداشتن $g(x)$ در $x=a$ متناقض است . بنابراین $h(x)$ در $x=a$ حد ندارد .

نکته: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ هیچکدام در $x=a$ دارای حد نباشند ممکن است $f(x)+g(x)$ یا $f(x)-g(x)$ در $x=a$ دارای حد باشند . به عنوان مثال ، توابع $f(x)=x-\sin\frac{1}{x}$ و $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ هیچ کدام در $x=0$ حد ندارند($g(x)$ بنابرمثال ۵ ، $f(x)$ بنابر تبصره بالا). اما تابع $h(x)=f(x)+g(x)=x$ ، در $x=0$ دارای حد است.

تعریف: تابع f را بر مجموعه A **کراندار** می نامند ، در صورتی که عدد حقیقی و مثبتی مانند M وجود داشته باشد ، به طوری که به ازای هر $|f(x)|<M, x\in A$.

قضیه۴: اگر تابع f در نقطه a دارای حد باشد ، آنگاه f در یک همسایگی محذوف a کراندار است . یعنی اعدادی مانند $M>0$ ، $\delta>0$ وجود دارند ، به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta$ ، آنگاه $|f(x)|<M$.

اثبات: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ، پس

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0 \ni 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

اکنون اگر به عنوان مثال $\varepsilon=1$ انتخاب کنیم ، داریم

$$|f(x)-L|<1 \Leftrightarrow -1<f(x)-L<1 \Leftrightarrow -1+L<f(x)<1+L$$

از اینجا نتیجه می گیریم که $|f(x)|<\max\{|1+L|,|-1+L|\}$.

بنابراین اگر $M=\max\{|1+L|,|-1+L|\}$ اختیار شود ، آنگاه برای هر x که $0<|x-a|<\delta$ ، داریم $|f(x)|<M$ و قضیه ثابت شده است.

قضیه۵: اگر حد تابع f در نقطه a ، برابربا صفر و تابع g در یک همسایگی (محذوف) a کراندار باشد ، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)=0$.

اثبات: بایستی ثابت کنیم که

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0 \ni 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)g(x)|<\varepsilon$$

چون تابع g در یک همسایگی a کراندار است ، پس اعدادی مانند $\delta_1>0$ و $M>0$ وجود دارند به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta_1$ ، آنگاه $|g(x)|<M$.

و نیز چون $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ پس

$$\forall\varepsilon_2>0\exists\delta_2>0 \ni 0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon_2$$

حال فرض کنیم $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ و $\varepsilon_2=\dfrac{\varepsilon}{M}$ اختیارمی کنیم . بنابراین، اگر $0<|x-a|<\delta$ آنگاه $|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}.M=\varepsilon$.

یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$ و قضیه ثابت شده است .

تبصره: نشان می دهیم که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ،اگر و فقط اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$. زیرا اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ، آنگاه چون $\lim\limits_{x\to a} L=L$ ، پس بنابر قضیه ۳

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=L-L=0$$

برعکس فرض کنیم که $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=0$. می توان نوشت $f(x)=(f(x)-L)+L$
و با استفاده از قضیه ۳داریم، $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-L)+\lim_{x\to a} L=0+L=L$.

قضیه۶: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ ، آنگاه: $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=L_1L_2$.

اثبات: می توانیم بنویسیم $f(x)g(x)=(f(x)-L_1)g(x)+L_1(g(x)-L_2)+L_1.L_2$.

اکنون از طرفین تساوی بالا حد می گیریم وقتی $x\to a$ ، و از قضایای ۳و۵و تبصره فوق استـــفاده می کنیم

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-L_1)g(x)+\lim_{x\to a} L_1(g(x)-L_2)+$$
$$\lim_{x\to a} L_1L_2=0\times L_2+L_1\times 0+L_1L_2=L_1L_2$$

و اثبات تمام است .

قضیه۷: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2\neq 0$ ، آنگاه

الف) $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{L_2}$ ب) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$.

اثبات : الف) بایستی نشان دهیم که

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\ni 0<|x-a|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{L_2}\right|<\varepsilon$$

اما داریم $\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{L_2}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{L_2-g(x)}{L_2g(x)}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{|g(x)-L_2|}{|L_2||g(x)|}<\varepsilon$.

چون $\lim_{x\to a} g(x)=L_2(\neq 0)$ پس

$$\forall\varepsilon_1>0\exists\delta_1>0\ni 0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow|g(x)-L_2|<\varepsilon_1(*)$$

اگر $\varepsilon_1=\frac{|L_2|}{2}$ بگیریم داریم $\big||g(x)|-|L_2|\big|\le|g(x)-L_2|<\frac{|L_2|}{2}$.

بنابراین $-\frac{|L_2|}{2}<|g(x)|-|L_2|<\frac{|L_2|}{2}$

که معادل است با $\frac{|L_2|}{2}<|g(x)|<\frac{3|L_2|}{2}$ و یا $\frac{2}{3|L_2|}<\frac{1}{|g(x)|}<\frac{2}{|L_2|}$

و از آن نتیجه می گیریم $\frac{2}{3|L_2|^2} < \frac{1}{|L_2||g(x)|} < \frac{2}{|L_2|^2}$.

مجددا در رابطه (*) $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}|L_2|^2$ می گیریم و فرض می کنیم δ_1 مقدار متناظر با $\varepsilon_1 = \frac{|L_2|}{2}$ و δ_1' مقدار متناظر با $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}|L_2|^2$ باشد . اگر $\delta = \min\{\delta_1, \delta_1'\}$ آنگاه برای هر x که $0 < |x-a| < \delta$ می توانیم بنویسیم

$$\frac{|g(x)-L_2|}{|L_2||g(x)|} < \frac{\varepsilon}{2}|L_2|^2 \times \frac{2}{|L_2|^2} = \varepsilon.$$

خلاصه ، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ بدست آمد به طوری که $0 < |x-a| < \delta$ نتیجه می دهد $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| < \varepsilon$. بنابراین $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$.

ب) با استفاده از (الف) و قضیه ۶ داریم

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)\times\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = L_1\times\frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۸: اگر n عددی طبیعی باشد و $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ، آنگاه

الف) $\lim_{x\to a} f^n(x) = \lim_{x\to a}(f(x))^n = L^n$		ب) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

هرگاه $L > 0$ ، یا $L \le 0$ و n عددی طبیعی فرد باشد.

اثبات: الف) با استفاده از قضیه ۶ و استقرای ریاضی به سادگی می توان حکم را ثابت کرد.

ب) ما این قسمت را بعد از پیوستگی و بیان چند قضیه لازم می توانیم ثابت کنیم.

قضیه۹(فشردگی): فرض کنیم در یک همسایگی محذوف a ، $h(x) \le f(x) \le g(x)$ و فرض کنیم که $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$.

در این صورت حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to a$ موجود بوده و داریم $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

اثبات: بایستی نشان دهیم که

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

چون $\lim_{x\to a} g(x) = L$ ، پس برای $\varepsilon_1 = \varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta_1 > 0$ وجود دارد به طوری که

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)-L| < \varepsilon$$

اما $\quad(۱)\quad |g(x)-L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < g(x)-L < \varepsilon \Leftrightarrow L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon$

نیز چون $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ ، پس برای $\varepsilon_2 = \varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta_2 > 0$ وجود دارد به طوری که

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$$

اما $\quad(۲)\quad |h(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \Leftrightarrow L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$

حال اگر $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ اختیار شود ، آنگاه $0 < |x-a| < \delta$ نتیجه می دهد که از هر دوی(۱) و (۲) می توانیم استفاده کنیم . پس با توجه به شرط قضیه اگر بتوان $\delta > 0$ را چنان مناسب اختیار کرد که برای $0 < |x-a| < \delta$ داشته باشیم $h(x) \le f(x) \le g(x)$ ، آنگاه داریم

$$L-\varepsilon < h(x) \le f(x) \le g(x) < L+\varepsilon$$

که از آن نتیجه می شود

$$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

خلاصه ، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی دلخواه مانند $\delta > 0$ به دست آمد ، به طوری که

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

یعنی ، $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و اثبات تمام است .

در مثال های زیر از قضایای حد استفاده کرده و حدود را محاسبه می نماییم .

مثال ۱۲: حدود زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$.

۲) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^p-1}{x^q-1}$ که در آن p و q اعدادی طبیعی هستند .

۳) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

۴) پیدا کنید $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[n]{1+x}$ را که در آن n عددی طبیعی است و $|x| < ۱$.

حل: ۱) دیده می شود که کسر $\dfrac{x^3-27}{x-3}$ در نقطه $x = 3$ تعریف نشده است ، اما همان طور که می دانیم برای داشتن حد در $x = 3$ لزومی ندارد که کسر در آن نقطه تعریف شده باشد.
به علاوه $x \to 3$ بدین معنی است که x به 3 به قدر کافی نزدیک می گردد ، ولی همواره $x \ne 3$ یعنی $x - 3 \ne 0$ ، بنابراین داریم

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)$$

(در اینجا صورت و مخرج را بر عامل غیر صفر $x-3$ تقسیم کرده ایم)

$$= \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 3x+9 = 9+9+9 = 27$$

۲) با استفاده از توضیحات (۱) داریم

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^p-1}{x^q-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1}{x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots+x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots+x+1)}$$

$$=\frac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{p}}{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{q}}=\frac{p}{q}$$

۳) داریم

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{2}{3}$$

۴) به سادگی دیده می شود که

$$1-|x|\le\sqrt[n]{1+x}\le 1+|x|$$

زیرا داریم $|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1\Leftrightarrow 0<x+1<2$

حال اگر $x\ge 0$ ، آنگاه $1+x\ge 1$ و $\sqrt[n]{1+x}\le 1+x$ و لذا $\sqrt[n]{1+x}\le 1+|x|$.

همچنین $1-|x|\le 1$ ، $\sqrt[n]{1+x}\ge 1$ بنابراین $1-|x|\le\sqrt[n]{1+x}\le 1+|x|$.

اگر $x<0$ ، آنگاه $0<1+x<1$ و لذا $\sqrt[n]{1+x}<1$ و بنابراین $\sqrt[n]{1+x}\le 1+|x|$.

همچنین $1+x\le\sqrt[n]{1+x}$ و لذا $1-|x|=1+x\le\sqrt[n]{1+x}$. پس در این حالت هم

$$1-|x|\le\sqrt[n]{1+x}\le 1+|x|$$

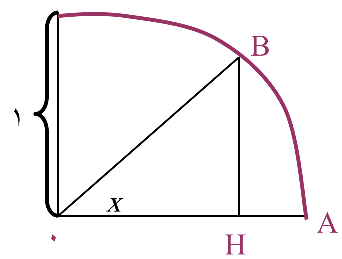
اکنون $\lim\limits_{x\to 0}(1-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}(1+|x|)=1$ ، پس بنابر قضیه ۹ (فشردگی)

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1.$$

مثال ۱۳: ثابت کنید که

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ ۳) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

حل: ۱) مطابق شکل ربع دایره ای به شعاع واحد درنظر گرفته و فرض می کنیم که $0 < x < \frac{\pi}{2}$



شکل ۲ . ۶

در مثلث قائم الزاویه OBH داریم $\sin x = \frac{\overline{BH}}{\overline{OB}}$ ، اما $\overline{OB} = 1$, $0 < \overline{BH} < \overline{OB} = 1$, $\overline{BH} < \widehat{AB}$ و برای قوس $\widehat{AB}$ داریم $\widehat{AB} = x \times$ شعاع $= x \times 1 = x$ ، بنابراین $\sin x = \frac{\overline{BH}}{1} = \overline{BH}$ و $0 < \sin x < x$. حال از طرفین این نامساوی حد می گیریم وقتی $x \to 0^+$

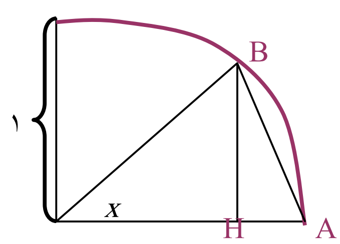
$$0 \le \lim_{x \to 0^+} \sin x \le \lim_{x \to 0^+} x$$

یا $0 \le \lim_{x \to 0^+} \sin x \le 0$ ، پس $\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0$. چون $\sin(-x) = -\sin x$ به طریق مشابه دیده می شود که $\lim_{x \to 0^-} \sin x = 0$ و بنابراین $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$.

۲) می دانیم $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ ، پس با استفاده از قضایای حد

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 - 2\lim_{x \to 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \times 0 = 1$$

۳) مطابق شکل ربع دایره ای به شعاع واحد در نظر می گیریم و فرض می کنیم $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، داریم



شکل ۲ . ۷

$$\underset{\text{مساحت مثلث}}{OAB} < \underset{\text{مساحت قطعه}}{OAB} < \underset{\text{مساحت مثلث}}{OAT}$$

و پس از محاسبه $\frac{1}{2}\tan x$ $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x <$ یا $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$. اگر طـرفین را بـر $\sin x > 0$ تقسیم کنیم ، به دست می آوریم $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ و یا $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

حال از طرفین نامساوی بالا حد می گیریم وقتی $x \to 0^+$ ، و از قضیه ۹ استفاده می کنیم

$$\lim_{x\to 0^+}\cos x \le \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} \le 1$$

یعنی $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$. چـون $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ پـس $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = 1$ و بنـابراین $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

توجه کنید که $\frac{\sin x}{x}$ در $x = 0$ تعریف نشده است ، ولی $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \to 0$ دارای حد است .

مثال ۱۴: حدود زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$ ۲) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}-2\cos x}$ ۳) $\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$

۴) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$ ۵) $\lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}$.

حل: ۱) تغییر متغیر $26 + x = z^3$ می دهیم . در این صورت $x = z^3 - 26$ و $z \to 3$ هرگاه $x \to 1$ ، بنابراین

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3} = \lim_{z\to 3}\frac{2z^3-54}{z-3} = \lim_{z\to 3}\frac{2(z-3)(z^2+3z+9)}{z-3} =$$
$$\lim_{z\to 3}2(z^2+3z+9) = 54$$

۲) تغییر متغیر $x - \frac{\pi}{6} = z$ می دهیم ، در این صورت $x = z + \frac{\pi}{6}$ و $z \to 0$ هرگـاه $x \to \frac{\pi}{6}$. بـا جایگذاری به دست می آوریم

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}-2\cos x} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt{3}-2\cos(z+\frac{\pi}{6})} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos z+\sin z}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{2\sin(\frac{z}{2})\cos(\frac{z}{2})}{2\sqrt{3}\sin^2(\frac{z}{2})+2\sin(\frac{z}{2})\cos(\frac{z}{2})} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos(\frac{z}{2})}{\sqrt{3}\sin(\frac{z}{2})+\cos(\frac{z}{2})} = 1$$

۳) تغیر متغیر $1 - x = t$ می دهیم ، در این صورت $x = 1 - t$ و $t \to 0$ هرگاه $x \to 1$. با جایگذاری به دست می آوریم

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim_{t\to0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2})}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{t}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}}=\frac{\pi}{2}\times1=\frac{\pi}{2}$$

۴) تغیر متغیر $1-x=t$ می دهیم و مانند (۳) داریم

$$\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to0}t\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2})=\lim_{t\to0}t\cot\frac{\pi t}{2}$$

$$\lim_{t\to0}t\frac{\cos\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to0}\cos\frac{\pi t}{2}\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}\times1\times1=\frac{2}{\pi}$$

۵) چون $\sin\frac{1}{x}$ در هر همسایگی محذوف $x=0$ کراندار است و چون $\lim_{x\to0}\sin x=0$ پس بنابر قضیه ۵، $\lim_{x\to0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0$.

مثال ۱۵: مطلوب است محاسبه حدود زیر :

۱) $\lim_{x\to1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ ۲) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$

۳) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ ۴) $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$

۵) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

حل: ۱) $x=1$ عامل صفرکننده در صورت و مخرج است و بایستی دوبار $x-1$ را از صورت و مخرج حذف کنیم . داریم

$$\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\frac{x^{n+1}-nx-x+n}{(x-1)^2}=\frac{x(x^n-1)-n(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)-n(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)-n}{x-1}$$

(صورت و مخرج را بر $x-1$ تقسیم کرده ایم)

$$= \frac{x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - (\overbrace{1+1+\dots+1}^{n})}{x-1}$$

$$= \frac{(x^n-1)+(x^{n-1}-1)+\dots+(x^2-1)+(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)+(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\dots+x+1)+\dots+(x-1)(x+1)+(x-1)}{x-1}$$

(مجددا صورت و مخرج را بر $x-1$ تقسیم کرده ایم)

$$= (x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)+(x^{n-2}+x^{n-3}+\dots+x+1)+\dots+(x+1)+1$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\Big[(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1) + (x^{n-2}+x^{n-3}+\dots+x+1)+\dots+(x+1)+1\Big] = n+(n-1)+\dots+2+1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲) بایستی عامل $x-1$ را از صورت و مخرج حذف کرد ، داریم

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(\sqrt{x}-1).(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{0}{\sqrt{2}(1+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۳)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}.\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}.\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}.\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\times4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}.\frac{1}{2}.(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2=1\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{2}$$

۴) می دانیم اگر m عدد طبیعی باشد ، آنگاه

$x^m-A^m=(x-A)(x^{m-1}+x^{m-2}A+\ldots+xA^{m-2}+A^{m-1})$. ما از این اتحاد استفاده می کنیم،داریم

$$\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}=\frac{x^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{m}}}{x-a}=\frac{(x^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{m}})(x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}a^{\frac{1}{m}}+\ldots+x^{\frac{1}{m}}a^{\frac{m-2}{m}}+a^{\frac{m-1}{m}})}{(x-a)(x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}a^{\frac{1}{m}}+\ldots+x^{\frac{1}{m}}a^{\frac{m-2}{m}}+a^{\frac{m-1}{m}})}$$

$$=\frac{x-a}{(x-a)(x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}a^{\frac{1}{m}}+\ldots+x^{\frac{1}{m}}a^{\frac{m-2}{m}}+a^{\frac{m-1}{m}})}=\frac{1}{x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}a^{\frac{1}{m}}+\ldots+x^{\frac{1}{m}}a^{\frac{m-2}{m}}+a^{\frac{m-1}{m}}}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}a^{\frac{1}{m}}+\ldots+x^{\frac{1}{m}}a^{\frac{m-2}{m}}+a^{\frac{m-1}{m}}}$$

$$=\frac{1}{a^{\frac{m-1}{m}}+a^{\frac{m-2}{m}}a^{\frac{1}{m}}+\ldots+a^{\frac{1}{m}}a^{\frac{m-2}{m}}+a^{\frac{m-1}{m}}}=\frac{1}{\underbrace{a^{\frac{m-1}{m}}+a^{\frac{m-1}{m}}+\ldots+a^{\frac{m-1}{m}}}_{m}}=\frac{1}{ma^{\frac{m-1}{m}}}=\frac{1}{m}a^{\frac{1-m}{m}}$$

۵) می دانیم که $\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$ ، پس

$$\sin(a+x)-\sin(a-x)=2\sin\frac{(a+x)-(a-x)}{2}\cos\frac{(a+x)+(a-x)}{2}=2\sin x\cos a$$

بنابراین

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos a}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.2\cos a=1\times2\cos a=2\cos a.$$